GROUPE A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 6 heures

Les candidats sont invités à lire l'énoncé attentivement. Lors de la correction, il sera tenu compte de la qualité et de la précision de la rédaction. On justifiera les réponses aux questions soit par des démonstrations soit par la construction de contre-exemples.

Le but du problème est de généraliser la notion d'inverse d'une matrice carrée (inversible) à coefficients dans un corps commutatif.

Les différentes parties du problème sont assez indépendantes pour qu'on puisse aborder l'une sans avoir complètement traité les précédentes.

On fixe un corps commutatif k. Les matrices considérées sont à coefficients dans k.

Si r et s sont deux entiers au moins égaux à 1, on note $M_{r\times s}(k)$ l'espace vectoriel sur k des matrices à r lignes et s colonnes à coefficients dans k. Pour $B \in M_{r\times s}(k)$, on note ${}^tB \in M_{s\times r}(k)$ la matrice *transposée* de B ; si $r = s$, on note Tr (B) la *trace* de B, c'est-à-dire la somme de ses coefficients diagonaux. On associe à $B \in M_{r\times s}(k)$ l'application k-linéaire φ_B de k^s dans k^r dont la matrice dans les bases canoniques est B, et on note Im (B) son image et Ker (B) son noyau.

On *fixe* dans la suite deux entiers m et n, au moins égaux à 1, et une matrice A *non nulle* de $M_{m\times n}(k)$ dont on note ρ le rang.

La lettre X désigne une matrice de $M_{n\times m}(k)$. On considère les relations suivantes :

(1) $AXA = A$;

(2) $XAX = X$;

(3) (quand $m = n$) $AX = XA$.

Si les relations (1) et (2) sont vérifiées, on dit que X est un *inverse faible* de A. Si $m = n$, on dit que X est un *pseudo-inverse* de A quand les relations (1), (2) et (3) sont satisfaites.

I

1. On considère deux entiers p et q au moins égaux à 1, et une matrice B de $M_{p\times q}(k)$. On suppose que X vérifie (1) et qu'il existe Y dans $M_{q\times p}(k)$ vérifiant $BYB = B$. Soit C une matrice de $M_{m\times q}(k)$. Prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $AZB = C$ ait une solution Z dans $M_{n\times p}(k)$ est qu'on ait $AXCYB = C$. Montrer que si cette condition est satisfaite, les solutions sont les matrices de la forme $Z = XCY + T - XATBY$, où T parcourt $M_{n\times p}(k)$.

2. On garde p, q, X, B, Y comme en 1., et on considère une matrice D de $M_{m\times p}(k)$ et une matrice E de $M_{n\times q}(k)$. Prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le système des deux équations $AZ = D$ et $ZB = E$ ait une solution Z dans $M_{n\times p}(k)$ est que chacune de ces équations ait une solution et qu'on ait l'égalité $AE = DB$.

II

1. On suppose que X vérifie (1). Prouver que AX et XA sont des matrices de projection et que A, AX et XA ont même rang, égal à Tr (AX).

   On suppose *désormais, dans cette partie II,* que m et n sont égaux.

2. On suppose A inversible. Si X vérifie (1), prouver que X est unique et est un pseudo-inverse de A. Peut-on obtenir la même conclusion en supposant seulement que X vérifie (2) et (3) ?

3. Trouver une matrice de $M_{2\times 2}(k)$ possédant plusieurs inverses faibles.

4. On suppose que X et $X' \in M_{m\times m}(k)$ sont des pseudo-inverses de A. Calculant AXAX', prouver qu'on a $AX' = XA$, puis $X = X'$.

   Si A admet un pseudo-inverse, celui-ci est donc unique; on l'appellera *le pseudo-inverse* de A.

Tournez la page S. V. P.

5. Supposons que A admette un pseudo-inverse X. Prouver que les matrices suivantes admettent un pseudo-inverse, et le calculer.

X ;

λA pour tout $\lambda \in k^\times$;

A^k pour tout entier $k \geqslant 1$;

${}^tA$;

RAR^{-1} pour toute matrice inversible R dans $M_{m \times m}(k)$.

6. On suppose $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Prouver que k^m est somme directe de Im (A) et Ker (A) et que, pour tout vecteur v de k^m, il existe un unique vecteur w de Im (A) tel que $\varphi_A(w) - v$ appartienne à Ker (A). Si on note $\psi(v)$ ce vecteur, montrer que l'application $v \longmapsto \psi(v)$ de k^m dans lui-même est linéaire et a pour matrice un pseudo-inverse de A.

7. Inversement, supposons que A admette un pseudo-inverse X. Prouver qu'on a $\mathrm{Im}(X) = \mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(X) = \mathrm{Ker}(A)$, que Im (A) et Ker (A) sont supplémentaires dans k^m, et que AX est la matrice de la projection de k^m sur Im (A) parallèlement à Ker (A).

8. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) A admet un pseudo inverse ;

(*ii*) $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$;

(*iii*) $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$;

(*iv*) A et A^2 ont même rang ;

(*v*) Il existe $V \in M_{m \times m}(k)$ vérifiant :

(4) $A^2 V = A$;

(*vi*) Il existe $W \in M_{m \times m}(k)$ vérifiant :

(5) $WA^2 = A$.

9. Soient V et W dans $M_{m \times m}(k)$ vérifiant (4) et (5) respectivement. Prouver qu'on a $WAV = AV^2 = W^2A$ et que WAV est un pseudo-inverse de A.

Dans la suite du problème, on fixe un automorphisme involutif ε du corps k, c'est-à-dire que, posant $\varepsilon(\lambda) = \bar{\lambda} \in k$ pour λ dans k, on a :

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$$

$$\overline{\lambda \mu} = \bar{\lambda}\,\bar{\mu}$$

$$\bar{\bar{\lambda}} = \lambda \quad \text{pour } \lambda, \mu \text{ dans } k$$

et $\quad \bar{1} = 1 \quad$ où 1 désigne l'élément unité de k.

On pourra penser, par exemple à $\varepsilon = id_k$, ou bien à $k = \mathbf{C}$, ε étant la conjugaison complexe.

Pour $B \in M_{m \times n}(k)$, de coefficients b_{ij}, on note $B^* \in M_{n \times m}(k)$ et on appelle *matrice adjointe* de A celle dont les coefficients b^*_{ji} vérifient $b^*_{ji} = \overline{b_{ij}}$. On dira qu'une matrice est *autoadjointe* si elle est égale à son adjointe (ce qui implique qu'il s'agit d'une matrice carrée).

III

On revient au cas où l'on ne suppose plus $m = n$. Outre les relations (1) et (2), on considère les relations

(6) $$AX = X^*A^*,$$

(7) $$XA = A^*X^*.$$

Si X vérifie (1), (2), (6) et (7), on dit que X est un *inverse généralisé* de A.

A

1. Si r est un entier, $r \geqslant 1$, et si $B \in M_{m \times n}(k)$, $C \in M_{n \times r}(k)$, prouver qu'on a $(BC)^* = C^*B^*$.

2. Si A est une matrice carrée inversible, A^{-1} est l'unique inverse généralisé de A.

Tournez la page S. V. P.

3. Montrer que X vérifie (2) et (6) si et seulement s'il vérifie

(8) $$XX^*A^* = X.$$

De même, X vérifie (1) et (7) si et seulement s'il vérifie

(9) $$XAA^* = A^*.$$

4. Prouver que $Y \in M_{n \times m}(k)$ est un inverse généralisé de A si et seulement si les relations (10) et (11) sont satisfaites

(10) $$A^*Y^*Y = Y,$$

(11) $$A^*A\,Y = A^*.$$

5. On suppose que X vérifie (8) et (9) et que $Y \in M_{n \times m}(k)$ vérifie (10) et (11). Prouver qu'on a $X = Y$. En déduire que A possède au plus un inverse généralisé.

Si A admet un inverse généralisé, il est unique et on l'appellera *l'inverse généralisé* de A.

6. On suppose que A possède l'inverse généralisé X. Prouver les assertions suivantes ;
   (*i*) A, A^*A et AA^* ont même rang ;
   (*ii*) A est l'inverse généralisé de X ;
   (*iii*) X^* est l'inverse généralisé de A^* ;
   (*iv*) XX^* est l'inverse généralisé de A^*A.

7. Si A est une matrice carrée, qui commute à A^* et qui possède l'inverse généralisé X, alors A admet le pseudo-inverse X.

B

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A possède un inverse généralisé est qu'il existe $B \in M_{n \times n}(k)$ vérifiant $BA^*AA^* = A^*$. (Si B vérifie cette égalité, on pourra prouver que $X = BA^*$ vérifie (9) et prouver (8) à l'aide de (1)).

2. Montrer qu'il existe un entier $j \geqslant 0$ et des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_j$ non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=0}^{j} \lambda_i (A^*A)^i = 0.$$

On choisit une telle relation et on note l le plus petit entier $i \geqslant 0$ tel que $\lambda_i \neq 0$.

On pose :

$$B = -\lambda_l^{-1} \sum_{i=0}^{j-l-1} \lambda_{l+1+i} (A^*A)^i \quad \text{si} \quad j > l, \quad B = 0 \quad \text{sinon.}$$

Vérifier qu'on a :

$$B (A^*A)^{l+1} = (A^*A)^l.$$

3. Dans cette question, on suppose que pour toute matrice B à coefficients dans k, la relation $B^*B = 0$ implique $B = 0$.

Vérifier que c'est bien le cas si $k = \mathbf{C}$, $*$ étant la conjugaison complexe.

Prouver que si deux matrices C et C' à coefficients dans k et à m-colonnes vérifient $CAA^* = C'AA^*$, alors elles vérifient aussi $CA = C'A$. En déduire que si B est choisi comme en (2), alors B est un inverse généralisé de A.

IV

Soit s un entier vérifiant $1 \leqslant s \leqslant \inf(m, n)$.

Si I est une partie à s éléments de $\{1, \ldots, m\}$, J une partie à s éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on note $A_{I,J}$ la matrice extraite de A obtenue en supprimant les lignes d'indice non dans I et les colonnes d'indice non dans J.

On note $P_s(m)$ l'ensemble des parties à s éléments de $\{1, \ldots, m\}$ α son cardinal, $P_s(n)$ celui des parties à s éléments de $\{1, \ldots, n\}$, β son cardinal. On numérote $I(1), \ldots, I(\alpha)$ les éléments de $P_s(m)$ et $J(1), \ldots, J(\beta)$ ceux de $P_s(n)$.

On construit la matrice $D_s(A)$ de $M_{\alpha \times \beta}(k)$ dont le coefficient dans la ligne i et la colonne j est $\det(A_{I(i),J(j)})$. On rappelle que ρ désigne le rang de A.

1. Calculer α.

Suite ⟶

2. Prouver que $D_s(A)$ est de rang 0 si $s > \rho$ et de rang 1 si $s = \rho$.

3. On suppose $m = n$ et A autoadjointe. On prend $s = \rho$. Prouver qu'il existe un entier i, $1 \leqslant i \leqslant \alpha$, tel que $A_{I(i),I(i)}$ soit inversible.

4. On suppose qu'on a $m = n$, $\varepsilon = id_k$, que k est de caractéristique différente de 2 et que l'on a $A^* + A = 0$. Prouver que ρ est pair.

V

1. Supposons $\rho = n$. Prouver qu'il existe $K \in M_{n \times m}(k)$ tel que KA soit inversible dans $M_{n \times n}(k)$. Si K est une telle matrice, montrer que $(KA)^{-1} K$ est un inverse faible de A.

2. Supposons $\rho = m$. Prouver que A possède un inverse faible.

3. Soit B une matrice de $M_{m \times \rho}(k)$, de rang ρ, obtenue à partir de A en supprimant $n - \rho$ colonnes, et soit Y un inverse faible de B. Prouver qu'on a $BYA = A$.

4. Soit B comme dans 3. et soit C une matrice $M_{\rho \times n}(k)$, de rang ρ, obtenue à partir de A en supprimant $m - \rho$ lignes, et Z un inverse faible de C. Posons $D = YAZ$. Prouver qu'on a $BDC = A$ et que D est inversible. Posant $X = ZD^{-1} Y$, prouver que X est un inverse faible de A (pour prouver (1), on pourra d'abord montrer qu'on a $DCZ = YBD = D$).

5. Gardons les notations de 4. Montrer que, si B^*B est inversible, on peut choisir Y de sorte que $X = ZD^{-1} Y$ vérifie (6); montrer que si B^*B et CC^* sont inversibles, alors A possède un inverse généralisé.

6. Supposons que A^*A ait même rang que A. Utilisant IV, prouver que A possède un inverse faible X vérifiant (6).

7. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A possède un inverse généralisé est que A^*A et AA^* aient même rang que A.

VI

On suppose désormais que k est le corps C des nombres complexes, et que ε est la conjugaison complexe. Quels que soient les entiers r et s au moins égaux à 1, on munit $M_{r \times s}(C)$ de la forme hermitienne définie positive $\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \bar{u}_{ij} v_{ij}$. On note $U \longmapsto \| U \|$ la norme correspondante. On identifie k^r à $M_{r \times 1}(k)$; ainsi k^r est un espace vectoriel hermitien.

1. Pour r et s des entiers au moins égaux à 1, et U, V dans $M_{r \times s}(C)$, prouver qu'on a :
$$\langle U, V \rangle = \mathrm{Tr}(U^*V) = \mathrm{Tr}(VU^*).$$

2. Prouver que A possède toujours un inverse généralisé.

On notera désormais B^+ l'inverse généralisé d'une matrice B à coefficients complexes.

3. Prouver que φ_{AA^+} est la projection orthogonale sur Im (A).

Si A est une matrice carrée possédant un pseudo-inverse Y, prouver qu'on a $A^+ = Y$ si et seulement si Im (A) et Ker (A) sont orthogonaux.

4. Soit $Y \in M_{n \times m}(k)$ vérifiant $AYA = 0$. Prouver qu'on a $\langle A^+, Y \rangle = 0$.

5. Inversement, supposons que X vérifie (1) et soit tel que, pour tout $Y \in M_{n \times m}(k)$ satisfaisant à $AYA = 0$, on ait $\langle X, Y \rangle = 0$. En prenant des matrices Y de la forme $Z(1 - AX)$ où Z est une matrice n'ayant qu'un coefficient non nul, prouver que X vérifie (8). De manière analogue, montrer que X vérifie (10) et que X est l'inverse généralisé de A.

6. Prouver que A^+ est, parmi les solutions X de (1), l'unique élément qui minimise $\| X \|^2$.

7. Soit $b \in k^m$; posons $c = \varphi_{A^+}(b) = A^+ b$. Soit $x \in k^n$; posons $z = \varphi_A(x - c) = A(x - c)$.

Montrer qu'on a :
$$\| Ax - b \|^2 = \| Ac - b \|^2 + \| z \|^2,$$
$$\| x \|^2 = \| c + A^+ z \|^2 + \| (1 - A^+A) x \|^2.$$

Tournez la page S. V. P.

VII

1. Prouver que les valeurs propres de A^*A sont des nombres réels positifs.
On note L l'ensemble de ces valeurs propres *non nulles* et, pour $\lambda \in L$, *on note* E_λ *la matrice* du projecteur orthogonal de k^n sur l'espace propre attaché à λ, et on pose $U_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} AE_\lambda$.

2. Prouver qu'on a :

$$A^*A = \sum_{\lambda \in L} \lambda E_\lambda$$

et

$$(A^*A)^+ = \sum_{\lambda \in L} \lambda^{-1} E_\lambda .$$

Prouver également les formules :

$$A^+A = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda ;$$

$$A = \sum_{\lambda \in L} \sqrt{\lambda}\, U_\lambda ;$$

$$U_\lambda^+ = U_\lambda^* \qquad \text{pour} \quad \lambda \in L ;$$

$U_\lambda^* U_\mu = U_\lambda U_\mu^* = 0$ pour λ et μ dans L, distincts.

Calculer A^+ en termes des U_λ.

3. Inversement, soit M un ensemble fini non vide de nombres réels positifs non nuls et, pour chaque $\lambda \in M$, une matrice $V_\lambda \in M_{m \times n}(C)$, non nulle, tels que

$$A = \sum_{\lambda \in M} \sqrt{\lambda}\, V_\lambda ;$$

$$V_\lambda^+ = V_\lambda^* \qquad \text{pour} \quad \lambda \in M ;$$

$$V_\lambda^* V_\mu = V_\lambda V_\mu^* = 0 \qquad \text{pour} \quad \lambda \text{ et } \mu \text{ dans M, distincts.}$$

Prouver qu'on a $M = L$ et, pour $\lambda \in L$, $U_\lambda = V_\lambda$.

4. Posons $H = \sum_{\lambda \in L} \sqrt{\lambda}\, U_\lambda U_\lambda^*$ et $U = \sum_{\lambda \in L} U_\lambda$.

Prouver que H est hermitienne positive, et qu'on a

$$H^2 = AA^*,$$
$$U^+ = U^*,$$
$$UU^+ = HH^+ = H^+H = AA^+,$$
$$A = HU.$$

Inversement, supposons qu'on ait $A = H'U'$ avec $H' \in M_{m \times m}(C)$ hermitienne positive, et $U' \in M_{m \times n}(C)$ vérifiant $U'^+ = U'^*$ et $U'U'^* = H'^+H'$. Prouver qu'alors $H = H'$ et $U = U'$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail